

PENYELESAIAN INTEGRAL TAK WAJAR DENGAN INTEGRAN MEMUAT FUNGSI EKSPONENSIAL DAN FUNGSI LOGARITMA

Luthfiah Nabila, Syalsanilah Alamsyah, Nia Andriani, Ul'fah Hernaeny M.Pd.
Universitas Indraprasta PGRI

Abstract: Mathematics is a science that plays an important role in the progress of science and technological advances that are currently occurring, both in mathematics and applied mathematics. In mathematics there is a calculus which includes studies on improper integrals, the gamma function and the beta function. An integral that is infinite or infinite is called an improper integral. The solution to an improper integral can be explained by finding the limit and its function. The functions contained in integral form are the gamma function and the beta function. In this research, the problem discussed is solving cases of improper integrals where the integrand contains an exponential function and a logarithmic function. The results of this research show that the gamma function and beta function can be used to solve improper integrals in accordance with the form of the gamma function and beta function. Improper integrals with integrands containing exponential functions can be solved using the gamma function by changing the function according to the form of the gamma function.

Abstrak: Matematika merupakan ilmu yang berperan cukup penting dalam kemajuan ilmu pengetahuan serta kemajuan teknologi yang terjadi saat ini baik dengan keilmuan matematika maupun matematika terapan. Dalam matematika terdapat kalkulus yang memuat kajian mengenai integral tak wajar, fungsi gamma, dan fungsi beta. Sebuah integral yang tak terbatas atau tak terhingga disebut dengan integral tak wajar. Penyelesaian dari integral tak wajar dapat dijabarkan dengan mencari limit dan fungsinya. Fungsi yang terdapat pada bentuk integral merupakan fungsi gamma dan fungsi beta. Pada penelitian ini, permasalahan yang dibahas adalah penyelesaian kasus integral tak wajar yang integrannya memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa fungsi gamma dan fungsi beta dapat digunakan untuk menyelesaikan integral tak wajar yang sesuai dengan bentuk fungsi gamma dan fungsi beta. Integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dapat diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi gamma.

Key Words: Kalkulus, Integral Tak Wajar, Fungsi Gamma, Fungsi Beta.

Article History

Received: Juli 2024
Reviewed: Juli 2024
Published: Juli 2024

Plagiarism Checker No 223

DOI :

10.8734/Trigo.v1i2.365

Copyright : Author

Publish by :

Trigonometri



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

PENDAHULUAN

Matematika mempunyai peranan yang cukup besar dalam kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini, baik dari segi keilmuan matematika maupun dari segi terapannya. Ilmu matematika berisi kumpulan teori-teori deduktif yang aksiomatis, masing-masing mempunyai suatu sistem tertentu yang terdiri dari pengertian-pengertian atau simbol-simbol yang sederhana, pernyataan-pernyataan pangkal yang sederhana, dan pernyataan-pernyataan sederhana yang tidak perlu dibuktikan. Akibatnya, kesimpulan yang diambil

sangatlah logis dan terstruktur secara sistematis (Kurniawati, 2011). Matematika terapan banyak berperan dalam menyelesaikan masalah-masalah di dunia nyata yang sukar diselesaikan dalam sistemnya, sehingga tidak hanya melatih ketrampilan dalam mengerjakan dan menyelesaikan soal-soal matematika saja, tetapi juga perlu mengkaji dan memahami konsep-konsep matematika baik yang sudah diajarkan dalam perkuliahan maupun yang belum diajarkan.

Ilmu kalkulus merupakan salah satu bagian dari matematika yang diperdalam di tingkat perguruan tinggi sebagai mata kuliah. Dimana kalkulus biasa disebut sebagai pintu gerbang untuk memulai pelajaran matematika yang lebih dalam (Silvia, 2020). Kalkulus dibagi menjadi 2 bagian kalkulus diferensial dan kalkulus integral, Teori integral mengemuka sebagai salah satu konsep utama dalam bidang ilmu matematika yang penuh dengan kepentingan. Dalam kerangka kalkulus, integral menjadi salah satu operasi utama yang memberikan landasan kuat untuk pemahaman matematika yang lebih luas.

Isaac Newton dan Gottfried Leibniz pada abad ke-17, membawa revolusi besar dalam kemampuan manusia untuk menghitung nilai sebenarnya dari berbagai jenis integral tanpa perlu bergantung pada pendekatan yang rumit seperti jumlah Riemann. Integral merupakan salah satu konsep dasar yang digunakan untuk mengukur luas di bawah kurva fungsi matematika terhadap sumbu x . Secara umum integral memiliki 2 bentuk, integral tak tentu dan integral tentu. Integral tentu dibagi menjadi 2 bagian integral wajar dan integral tak wajar, integral tak wajar merupakan jenis integral yang digunakan ketika integral tentu biasa tidak dapat dihitung karena batas integrasi melibatkan tak terhingga.

Integral tak wajar terdiri dari 2 jenis tipe I dan tipe II, Integral tak wajar tipe I merupakan integral yang batas atas atau batas bawah interval integrasinya tak terhingga, sedangkan integral tak wajar tipe II merupakan integral yang digunakan ketika fungsi memiliki singularitas atau diselesaikan dengan metode numerik. Metode numerik pada aturan trapesium digunakan untuk mengestimasi integral dari suatu fungsi yang sulit atau tidak dapat diintegrasikan secara analitis. Kemudian, hasil akhir dari integral tak wajar tipe I dan tipe II dihitung menggunakan aturan trapesium sehingga diperoleh penyelesaian integral tak wajar secara numerik.

Dalam matematika terdapat kajian mengenai kalkulus yang diantaranya membahas teorema L'Hopital, integral tak wajar, fungsi gamma, fungsi beta, dan lain-lain. Fungsi gamma dan fungsi beta merupakan fungsi-fungsi istimewa yang sering muncul dalam pemecahan persamaan diferensial, proses fisika, perpindahan panas, gesekan sumber bunyi, rambatan gelombang, potensial gaya, persamaan gelombang, mekanika kuantum, perhitungan probabilitas pada problem di mekanika statistik dan lainnya (Kurniawati, 2011). Fungsi gamma dan fungsi beta merupakan fungsi dalam bentuk integral. Suatu integral dengan batas tak hingga dapat disebut sebagai integral tak wajar, seperti integral dengan batas atas tak hingga, integral dengan batas bawah tak hingga, dan integral dengan batas atas dan bawah tak hingga. Menyelesaikan suatu integral tak wajar dalam kalkulus dapat dilakukan dengan mencari limit dari fungsinya.

Integral tak wajar merupakan integral tentu yang memiliki batas tak terhingga atau fungsi yang terdapat dua jenis integral tak wajar, yaitu integral tak wajar jenis pertama dan integral tak wajar jenis kedua. Integral tak wajar jenis pertama memiliki batas tak terhingga pada interval tertentu, sedangkan integral tak wajar jenis kedua memiliki fungsi yang tidak terdefinisi pada interval tertentu (J Vanberg D, 2019). Integral tersebut dinamakan integral tak wajar dengan bataspengintegralan tak terhingga, seperti bentuk berikut:

$$(a) \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx$$
$$(b) \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x)dx$$
$$(c) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x)dx + \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-b}^a f(x)dx$$

Apabila limit pada sisi kanan ada dan memiliki nilai yang terhingga, integral tak wajar tersebut bersangkutan dengan konvergen dan memiliki nilai yang terhingga. DISKUSI

Pembelajaran Matematika

Pendidikan pada dasarnya adalah usaha sadar dan terencana untuk mewujudkan suasana belajar dan proses pembelajaran agar peserta didik secara aktif mengembangkan potensi dirinya untuk memiliki kekuatan spritual, keagamaan, kepribadian, kecerdasan, akhlak mulia, serta keterampilan yang diperlukan dirinya, masyarakat, bangsa dan negara (Hasbullah, 2012).

“Menurut Tafsir, Pendidikan bagi manusia merupakan kebutuhan dasar dan hak asasi yang paling fundamental. Secara filosofis manusia tanpa pendidikan adalah manusia yang “mati” karena sesungguhnya semenjak bayi, secara alamiah dan fitrahnya, manusia belajar untuk beradaptasi dengan lingkungannya. Ia juga mendefinisikan bahwa pendidikan adalah upaya mengembangkan potensi-potensi manusiawi peserta didik melalui proses belajar, baik potensi fisik, potensi cipta, rasa maupun karsanya agar potensi tersebut menjadi nyata dan dapat berfungsi dalam perjalanan hidupnya.”

Salah satu ilmu yang penting dalam pendidikan adalah matematika adalah pola berfikir, pola mengorganisasikan, pembuktian yang logis, matematika itu adalah bahasa yang menggunakan istilah yang didefinisikan dengan cermat, jelas dan akurat representasinya dengan simbol dan padat, lebih berupa bahasa simbol mengenai ide daripada mengenai bunyi (Jasnimar, 2016). Matematika merupakan salah satu bidang study yang ada pada semua jenjang pendidikan, mulai dari tingkat sekolah dasar hingga perguruan tinggi. Anak sekolah dasar berada pada tahap operasi konkrit oleh karena itu pembelajaran di SD harus dimulai dengan menyajikan masalah konkrit atau realistik sehingga peserta didik dapat membayangkan proses pembelajaran yang berlangsung.

“Tujuan Pembelajaran Matematika di SD dapat dilihat di dalam Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) tahun 2006. Mata pelajaran matematika bertujuan agar peserta didik memiliki kemampuan sebagai berikut, yaitu:(1) memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma, secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah, (2) menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika, (3) memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh, (4) mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah, (5) memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu. Perhatian dan minat dalam mempelajari matematika sifat-sifat ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah (Hasbullah, 2012).”

Integral Tak Wajar

Integral merupakan salah satu bahasan dalam kalkulus yang merupakan cabang matematika. Integral adalah kebalikan dari turunan (diferensial). Oleh karena itu integral disebut juga anti turunan atau anti diferensial. Kegunaan integral dalam kehidupan sehari-hari banyak sekali, diantaranya menentukan luas suatu bidang, menentukan volume benda putar, menentukan panjang busur dan sebagainya. Integral tidak hanya dipergunakan di matematika saja. Banyak bidang lain yang menggunakan integral, seperti ekonomi, fisika, biologi, teknik dan masih banyak lagi disiplin ilmu yang lain yang mempergunakannya.

Integral tak tentu (*indefinite integral*) adalah integral yang tidak memiliki batas-batas nilai tertentu, sehingga hanya diperoleh fungsi umumnya saja disertai suatu konstanta C. Setiap bentuk operasi matematis pasti memiliki operasi kebalikan atau invers, seperti penjumlahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, akar dan pangkat. Kebalikan itu juga berlaku pada turunan, di mana kebalikan dari turunan adalah integral. Saat belajar turunan arti $f'(x)$ adalah turunan dari fungsi $f(x)$. Persamaan dasar integral tak tentu merupakan rumus umum untuk mengonversi fungsi turunan menjadi fungsi integral. Adapun persamaan dasarnya adalah $n \neq -1$. Rumus integral tak tentu adalah:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \text{ di mana } n \neq -1$$

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Integral tak tentu ini memiliki fungsi yang dilambangkan sebagai $f(x)$ sebagai penjumlahan $F(x)$ dengan C. Hal ini ditulis dengan rumus:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Kemudian, rumus tersebut diturunkan menjadi:

$$d/dx \text{ X } a / (n+1) x^{(n+1)} = a \cdot x^{n+1}$$

Rumus kemudian disederhanakan kembali menjadi:

$$\int a \cdot x^n dx = a/(n+1) x^{n+1} + C$$

Tentunya, integral tak tentu memiliki syarat berupa n tidak sama dengan -1 . Integral tak tentu ini juga memiliki beberapa sifat yang harus dipahami dan dipelajari oleh siswa untuk bisa mengerjakan soal integral. Sifat ini akan mempermudah menyelesaikan permasalahan yang terkait integral.

Berikut sifat-sifat integral tak tentu yaitu:

1. Sifat Pangkat: $\int x^n dx = x^{n+1}/n+1 + C$
2. Sifat Penjumlahan dan Pengurangan: $\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
3. Sifat Konstanta: $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$.

Karena integral merupakan kebalikan (invers) dari turunan, maka untuk menemukan rumus integral kita beranjak dari turunan. Integral merupakan antiturunan, sehingga jika terdapat fungsi $F(x)$ yang kontinu pada interval $[a, b]$ diperoleh:

$$(F(x))' = F'(x) = f(x).$$

Antiturunan dari $f(x)$ adalah mencari fungsi yang turunannya adalah $f(x)$, ditulis $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Secara umum dapat dituliskan: $f(x) dx = F(x) + C$.

KESIMPULAN

Simpulan yang dapat diambil dari hasil dan pembahasan bahwa integral tak wajar yang dapat diselesaikan dengan bantuan fungsi gamma adalah: a. Integral tak wajar yang memiliki bentuk sesuai dengan fungsi gamma. Integral tak wajar yang integrannya melibatkan fungsi eksponensial negatif. Salah satu aplikasi fungsi gamma adalah penggunaannya dalam analisis fungsi kepadatan peluang dimana fungsinya melibatkan fungsi eksponensial negatif, seperti fungsi

Rayleigh, fungsi distribusi normal standard. Integral tak wajar yang integrannya melibatkan fungsi logaritma. Dari beberapa contoh integral tak wajar terlihat bahwa integral tak wajar dengan integran memuat fungsi logaritma dapat diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan langkah mensubstitusi variabel. Integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dapat diselesaikan menggunakan fungsi gamma dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi gamma.

Integral tak wajar yang dapat diselesaikan dengan bantuan fungsi beta adalah: a. Integral tak wajar yang memiliki bentuk sesuai dengan fungsi beta dan sifat-sifat fungsi beta. b. Integral tak wajar pada selang hingga dengan bentuk 5. Beberapa kasus integral tak wajar dapat diselesaikan menggunakan fungsi beta dengan cara merubah fungsi tersebut sesuai dengan bentuk fungsi beta, kemudian mencari nilai dari fungsi beta tersebut dengan menggunakan hubungan fungsi gamma dan fungsi beta.

SARAN

Saran yang dapat penulis berikan dari hasil dan pembahasan yang telah diberikan adalah. Pembahasan ini hanya mengkaji integral tak wajar dengan integran memuat fungsi eksponensial dan fungsi logaritma, maka diperlukan studi lebih lanjut untuk membahas penyelesaian integral tak wajar dengan integran fungsi lainnya, seperti fungsi trigonometri. Alat yang digunakan untuk menyelesaikan integral tak wajar dalam pembahasan ini adalah fungsi gamma dan fungsi beta. Oleh sebab itu, perlu dilakukan pembahasan lebih lanjut untuk menyelesaikan integral tak wajar dengan menggunakan alat lainnya, seperti teorema residu.

DAFTAR PUSTAKA

- Vanberg D, P. E. (2019). *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Hasbullah. (2012). *Dasar-Dasar Ilmu Pendidikan*. Jakarta: Raja Grafindo Persada.
- Jasnimar. (2016). Peningkatan Hasil Belajar Matematika Melalui Pendekatan. *Jurnal Konsling Dan Pendidikan*, 20-50.
- Kurniawati, A. (2011). Penyelesaian Kasus Integral Tak Wajar. *Skripsi Strata 1 Universitas Negeri Semarang*, 8-12.
- Silvia, Y. Z. (2020). Hubungan Hasil Belajar Kalkulus Diferensial dan Kalkulus Integral Terhadap Hasil Belajar Kalkulus Lanjut Mahasiswa Pendidikan Matematika Universitas Sanata Dharna. *Jurnal Sains dan Edukasi Sains Volume 3*, 59.