

**ANALISIS IMPLEMENTASI PROBLEM BASED LEARNING DALAM PEMECAHAN INTEGRAL
TAK TENTU FUNGSI ALJABAR & TRIGONOMETRI**

Yurina Eka Fadila¹, Natasya Intan Wandita², & Dwi Sinta Cahyani³, Ul'fah Hernaeny M.Pd⁴

Universitas Indraprasta PGRI

yurinaekafadila12@gmail.com¹, tasyaintan3796@gmail.com², dwisintac2004@gmail.com³

ABSTRAK

Problem Based Learning merupakan satu dari banyaknya metode pembelajaran yang dapat di implementasikan dalam mempelajari matematika. Problem Based Learning merupakan suatu metode pembelajaran yang berfokus pada pemecahan masalah dan pengembangan kemampuan berpikir kritis. PBL juga merupakan bentuk pembelajaran yang memotivasi siswa untuk mendalami aturan belajar serta bekerja secara kelompok untuk mencari solusi permasalahan di dunia nyata. Tentunya dalam menyelesaikan dengan menggunakan cara yang konstruktif. Untuk menyelesaikannya tentunya pengajar dengan memberikan contoh-contoh matematika salah satunya pada materi integral tak tentu. Integral tak tentu dioperasikan saling berkebalikan atau invers seperti pengurangan dengan penjumlahan atau, pembagian dengan perkalian serta, pemangkatan dengan penarikan akar. Dalam PBL, siswa akan diberikan masalah yang terkait dengan materi integral tak tentu. Setelah itu, siswa akan diminta untuk menyelesaikan permasalahan dengan menggunakan konsep integral tak tentu. Dalam PBL, siswa juga akan belajar dengan cara lebih aktif dan interaktif, efektif, efisien, menyenangkan, insiatif, dan motivasi belajar pada saat belajar secara kelompok. Dalam PBL, siswa juga akan belajar dengan cara yang lebih mandiri, aktif dan menyenangkan. Siswa akan belajar dengan cara mencari informasi sendiri dan menyelesaikan masalah sendiri agar lebih efektif dalam mempelajari materi integral tak tentu.

Kata Kunci: Problem Based Learning, Integral, Integral Tak Tentu

Article History

Received: Juli 2024

Reviewed: Juli 2024

Published: Juli 2024

Plagiarism Checker No 223

DOI :

10.8734/Trigo.v1i2.365

Copyright : Author

Publish by : Trigonometri



This work is licensed
under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

PENDAHULUAN

Problem Based Learning (PBL) atau pembelajaran yang berdasar pada masalah pertama kali diperkenalkan oleh Howard S. Barrows yang banyak diimplementasikan pada pendidikan kedokteran. Problem Based Learning merupakan pecahan dari aliran belajar konstruktivisme. Pada tahun 1960-an sampai tahun 1970-an, banyak upaya telah dilakukan untuk mendefinisikan konsep "Pembelajaran Berbasis Masalah". Howard Barrows yang turut andil pada tahap awal pengembangan Problem Based Learning di McMaster University di Kanada, mendefinisikan konsep dalam istilah yang khusus, menjadi sebuah pembelajaran yang mengutamakan pada peran aktif peserta didik, yang terjadi dalam kelompok kecil dengan peran guru yang bertindak sebagai pemberi fasilitas dan dilaksanakan berdasarkan masalah yang diberikan oleh guru.

Penerapan Problem Based Learning dalam pelaksanaan di bidang pendidikan dimulai di McMaster University Medical School di Kanada pada awal tahun 1960-an.

Pembelajaran berdasar pada masalah merupakan strategi pembelajaran yang dapat digunakan untuk mengajar dengan menggunakan permasalahan dunia nyata, melatih keahlian berpikir dan pemecahan masalah, serta menyampaikan konsep dan pengetahuan penting dari materi pembelajaran. Pembelajaran berbasis masalah merupakan metode pembelajaran yang menggunakan masalah sebagai langkah awal dalam mengumpulkan dan mengintegrasikan pengetahuan baru. Pembelajaran berbasis masalah (PBL), berdasarkan pendapat para ahli, merupakan model pembelajaran yang mendorong siswa untuk belajar dalam kelompok dan belajar bagaimana berkolaborasi untuk menemukan solusi dari permasalahan dunia nyata. Simulasi masalah membantu merangsang rasa ingin tahu siswa sebelum mereka mulai mempelajari suatu mata pelajaran. PBL memungkinkan siswa untuk berpikir kritis dan analitis serta memperoleh dan menerapkan pengetahuan yang baru diperoleh secara tepat. Metode pembelajaran PBL mengedepankan keterampilan belajar jangka panjang.

Matematikawan abad ketujuh belas Gottfried Leibniz dan Isaac Newton sama-sama menemukan analisis secara independen. Newton adalah orang pertama yang menciptakannya, tetapi Leibniz-lah yang menciptakan notasi yang digunakan para ahli matematika saat ini. Kalkulus adalah kata Latin kalkulus, yang berarti "batu kecil" yang digunakan untuk perhitungan. Analisis adalah cabang ilmu yang mempelajari perubahan dan lajunya. Sebelum kalkulus ditemukan, seluruh matematika bersifat statis. Kalkulus adalah salah satu cabang matematika yang mencakup limit, turunan, integral, dan lain-lain. Kalkulus terdiri dari dua bidang utama: diferensial dan integral, yang dihubungkan dengan prinsip-prinsip dasar kalkulus. Kalkulus diferensial menentukan laju perubahan suatu besaran, sedangkan kalkulus integral menentukan besaran yang laju perubahannya diketahui.

Integral merupakan satu dari pecahan ilmu kalkulus. Integral merupakan lawan dari proses differensial atau merupakan operasi invers dari differensial dan sering disebut pula bahwa integral merupakan anti turunan (anti differensial) $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$. Integral di pecah kembali menjadi dua jenis yaitu integral tak tentu (*indefinite integral*) dan integral tentu (*definite integral*).

METODE PENELITIAN

Studi literatur menjadi metode penelitian ini yang merupakan uraian kajian mengenai peranan *Problem Based Learning* terhadap materi Integral Tak Tentu dengan Fungsi Aljabar & Trigonometri. Penelitian ini memiliki tujuan untuk menghasilkan sebuah gagasan mengenai model pembelajaran *Problem Based Learning* yang dinantikan mampu mengembangkan keterampilan siswa dalam mencerna dan menerapkan materi. Dengan melakukan pengumpulan data studi literatur jurnal penelitian yang sudah ada. Studi literatur merupakan salah satu metode penelitian yang menggabungkan berbagai data dan sumber referensi yang relevan dengan topik penelitian yang diangkat.

PEMBAHASAN

A. Teknik Pelaksanaan Model Pembelajaran PBL

Pelaksanaan Model pembelajaran *problem based learning* diterapkan dengan menerapkan pembelajaran berdasar konstruktif, di mana siswa akan dibuat menjadi lebih tangkas dalam kegiatan pembelajaran. Hal tersebut dikarenakan dalam metode ini siswa akan dituntut untuk mengkonstruksikan pengetahuan yang mereka ketahui untuk menemukan sebuah konsep dan pemecahan masalah yang akan diberikan pada saat kegiatan pembelajaran berlangsung. Guru akan berperan sebagai penyedia fasilitas untuk memandu siswa dalam kegiatan pembelajaran dan pengimplementasian kegiatan pembelajaran dengan model *problem based learning* diterapkan dengan cara sebagai berikut:

1. Bagian kesatu dari model pembelajaram PBL yaitu, mengarahkan siswa ke suatu masalah. Siswa akan dituntut untuk mencermati situasi disekitar mereka, lalu memilih masalah yang belum terpecahkan. Masalah yang dipilih harus terlihat menarik bagi siswa agar dapat mendorong semangat siswa saat menyelesaikan permasalahan. Selain itu, masalah yang diambil pada PBL sebisa mungkin mampu menghasilkan beberapa hipotesis, dengan beberapa macam hipotesis yang dihasilkan maka mampu membantu siswa dalam melatih keterampilan pemecahan masalah dan kreativitasan siswa dalam berpikir.
2. Bagian kedua dari model pembelajaran PBL adalah melakukan pengorganisasian siswa untuk kegiatan belajar. Guru akan mengelompokkan siswa ke dalam kelompok-kelompok kecil, dengan maksud ingin terjadinya pembelajaran karena interaksi sosial antara siswa satu dengan siswa lainnya, serta bisa pula siswa dengan guru. Adanya diskusi antara siswa dan guru dapat membagikan motivasi kepada siswa dalam berusaha untuk memberikan atau bertukar informasi yang mereka ketahui dan butuhkan untuk menyelesaikan masalah. Hal ini dilakukan untuk memastikan bahwa penyaluran informasi dilakukan secara efisien selama kegiatan pembelajaran. Dengan demikian, berdampak pada peningkatan keterampilan siswa dalam menguasai materi yang sedang mereka pelajari. Pada bagian ini pula siswa dilatih untuk mampu menghasilkan sebuah ide yang murni dan dapat membentuk latihan bagi siswa dalam berpikir dengan luwes.
3. Bagian ketiga model pembelajaran PBL adalah melibatkan bimbingan dalam menyelidiki mandiri maupun berkelompok. Siswa menyelesaikan masalah yang diberikan oleh sang guru bersama-sama. Selama proses pembelajaran, siswa akan terlibat dalam penelitian lalu melakukan percobaan untuk menguji hipotesis yang telah mereka buat pada tahap sebelumnya. Siswa akan memperoleh pengalaman praktis melalui pelaksanaan percobaan, yang meningkatkan pemahaman mereka terhadap materi. Siswa pun mendapatkan pengetahuan dari apa yang mereka baca, informasi dari sesama siswa dan berdiskusi dengan guru. Dengan begitu siswa bisa memperoleh pengalamannya sendiri melalui percobaan yang mereka lakukan.
4. Bagian keempat model pembelajaran PBL yaitu, moment di mana siswa mengembangkan dan menyajikan hasil karyanya. Siswa diberi kesempatan untuk mengasah keterampilan berpikir lancar dan kemampuan mengaplikasikan karya mereka. Dengan kedua aspek tersebut siswa akan diminta untuk memaparkan hasil karyanya dengan. Melalui proses pemaparan siswa berlatih kemampuan berpikir lancar dan kemampuan mengerjakan. Keberhasilan dalam pemaparan hasil karya tersebut mencerminkan penguasaan materi dan kemampuan siswa dalam menyampaikan hasil karya dengan lancar.

5. Bagian terakhir dalam model pembelajaran PBL yaitu, proses pemecahan masalah perlu dilakukan suatu analisis dan evaluasi. Siswa mengevaluasi semua proses yang telah mereka lakukan pada langkah sebelumnya bersama guru. Siswa diajarkan untuk mengembangkan kemampuan berpikir fasih dan elok. Keterampilan tersebut secara tersirat diterangkan ketika siswa mengevaluasi sendiri proses pembelajaran yang mereka lakukan. Dengan demikian, siswa mampu melakukan evaluasi, memberikan alasan, dan mempertahankan pendapat mereka dengan alasan yang tepat. Kemampuan berpikir lancar dapat terus dilatih dengan cara memberikan kesempatan pada siswa untuk menjawab pertanyaan yang diajukan baik oleh guru maupun sesama siswa, dengan begitu kemampuan siswa dalam berpikir lancar dapat terus meningkat.

Keberhasilan yang di dapat dalam proses dan hasil belajar menggunakan model pembelajaran problem based learning diantaranya, yaitu:

1. Problem Based Learning (PBL) menghasilkan sebuah pembelajaran yang berkesan. Dalam prosesnya siswa mempelajari cara memecahkan sebuah masalah dan mereka juga mencoba untuk menerapkan pengetahuan yang mereka miliki, serta dapat menemukan pengetahuan yang mereka butuhkan dari proses tersebut. Dengan begitu, pembelajaran menjadi terkesan dan makna. Siswa pun menjadi mampu bila dihadapi suatu masalah dengan cara menerapkan konsep yang telah mereka pahami.
2. Adanya kegiatan pembelajaran PBL, siswa bersama-sama dapat menyatukan pengetahuan dan keterampilan mereka masing-masing, serta menerapkannya dalam situasi tertentu.
3. Model pembelajaran PBL ini mampu meningkatkan keterampilan berpikir kritis, inisiatif, motivasi belajar serta membangun hubungan dalam bekerja secara kelompok.

B. Materi Integral Taktentu Fungsi Aljabar dan Trigonometri

Dalam matematika terdapat operasi-operasi yang saling invers atau berbanding terbalik, seperti pengurangan dengan penjumlahan, pembagian dengan perkalian, dan perpangkatan dengan mengambil akar. Demikian pula, integral disebut kebalikan dari turunan, atau antiturunan. Integral dapat dibagi menjadi dua jenis: tak tentu dan tentu.

Integral tak tentu atau antidiferensiasi merupakan sebuah bentuk pengoperasian integral pada suatu fungsi yang melahirkan fungsi baru. Karena fungsi ini belum mempunyai nilai tetap (berupa variabel) atau batas atas dan bawah, maka cara integrasi yang membuat fungsi tak tentu disebut integrasi tak tentu. Pengintegralan fungsi $f(x)$ terhadap variabel x dapat ditulis $\int f(x)dx = F(x) + c$, dimana c adalah sembarang konstanta dan disebut konstanta integrasi.

Antiderivatif Fungsi Aljabar

Integral tak tentu fungsi aljabar sebagai anti turunan

Integral adalah anti diferensial/anti turunan. $F(x)$ disebut anti turunan dari $f(x)$ pada interval I , Jika $\frac{d}{dx} [F(x)] = f(x)$ untuk semua x dalam I .

Fungsi	Turunan	Integral
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\int f'(x)dx = \int 2x dx = \frac{2}{(1+1)}x^{(1+1)} + C = x^2 + C$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 2x^2$	$\int f'(x)dx = \int 3x^2 dx = \frac{3}{(2+1)}x^{(2+1)} + C = x^3 + C$
$f(x) = x^4$	$f'(x) = 2x^3$	$\int f'(x)dx = \int 4x^3 dx = \frac{4}{(3+1)}x^{(3+1)} + C = x^4 + C$

Dengan mengamati tabel di atas dapat diperoleh :

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

Dengan n bilangan rasional dan $n \neq -1$

Contoh pengoperasiannya :

1. $\int 12x^3 dx = \dots$

Jawab :

$$\int 12x^3 dx = \frac{12}{3+1}x^{3+1} + C = 3x^4 + C$$

Jadi, nilai dari $\int 12x^3 dx$ adalah $3x^4 + C$

2. $\int -18x^2 dx = \dots$

Jawab :

$$\int -18x^2 dx = \frac{-18}{2+1}x^{2+1} + C = -6x^3 + C$$

Jadi, nilai dari $\int -18x^2 dx$ adalah $-6x^3 + C$

3. $\int \frac{1}{x^4} dx = \dots$

Jawab :

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + C = -\frac{1}{3}x^{-3} + C$$

Jadi, nilai dari $\int \frac{1}{x^4} dx$ adalah $-\frac{1}{3}x^{-3} + C$

Integral tak tentu fungsi aljabar dengan metode substitusi

Jika u fungsi dalam x , maka $\int u^n du = \frac{1}{n}u^{n+1} + C$

Jika u fungsi dalam x , maka $\int u^{-1} du = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C$

Untuk memahami teknik integrasi dengan menggunakan metode substitusi, perhatikan contoh berikut

Tentukan $\int 2x(x^2 + 1)^5 dx$

Pembahasan :

Misalkan $u = x^2 + 1$ sehingga $du = 2x dx$, sehingga bentuk fungsi integral menjadi

$$\int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C$$
$$= \frac{1}{6}(x^2 + 1)^6 + C$$

Jadi, $\int 2x(x^2 + 1)^5 dx = \frac{1}{6}(x^2 + 1)^6 + C$

Contoh di atas merupakan salah satu contoh menentukan hasil integral suatu fungsi dengan metode substitusi. Dengan metode ini kita dapat menyederhanakan fungsi integral dalam bentuk $\int u^n du$ berdasarkan teorema berikut. Jika $u = g(x)$ dan $du = u' = g'(x)dx$ dengan $g(x)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan dan F adalah antiturunan dari f , maka metode substitusi dirumuskan :

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int F(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Contoh pengoperasiannya :

1. Nilai integral dari $\int \sqrt{3x - 5} dx = \dots$

Jawab :

Misalkan $u = 3x - 5$

$$\frac{du}{dx} = 3 \leftrightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \sqrt{3x - 5} dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3} du$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{9} (3x - 5) \sqrt{3x - 5} + C$$

Jadi, nilai integral dari $\int \sqrt{3x - 5} dx$ adalah $= \frac{2}{9} (3x - 5) \sqrt{3x - 5} + C$

2. Nilai integral dari $\int 6x^2(2x^3 + 7)^8 dx$

Jawab :

Misalkan $u = 2x^3 + 7$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \leftrightarrow du = 6x^2 dx$$

$$\int 6x^2(2x^3 + 7)^8 dx = \int u^8 du$$
$$= \frac{1}{9} u^9 + C$$

Jadi, nilai integral dari $\int 6x^2(2x^3 + 7)^8 dx$ adalah $\frac{1}{9} u^9 + C$

Adapun rumus-rumus integral untuk fungsi aljabar :

Rumus-rumus integral

➤ **Integral fungsi aljabar**

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ di mana $n \neq -1$

2. $\int kx^n dx = \frac{k}{n+1} x^{n+1} + C$ di mana $n \neq -1$

3. $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$, di mana $k \neq 0$

4. $\int 1 dx = x + C$

5. $\int k dx = kx + C$ di mana $k \neq 0$

6. $\int (x^m \pm x^n \pm \dots) dx = \int x^m dx \pm \int x^n dx \pm \dots + C$

Antiderifatif Fungsi Trigonometri

Berikut beberapa rumus dasar pada integral taktentu fungsi trigonometri:

➤ **Integral Fungsi Trigonometri**

1. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

2. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$

3. $\int \cos x dx = \sin x + C$

4. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$

5. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| = -\ln|\cos x| + C$

6. $\int \tan ax dx = \frac{1}{a} \ln|\sec ax| = -\frac{1}{a} \ln|\cos ax| + C$

7. $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

8. $\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln|\sin ax| + C$

9. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

10. $\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln|\sec ax + \tan ax| + C$

Dengan pembuktian mundur diperoleh :

$$1. \int \sin x \, dx = \dots$$

$$-\cos x + k = \int d(\cos x) \, dx$$

$$\cos x + k = \int -\sin x \, dx$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + k$$

$$2. \int \cos x \, dx = \dots$$

$$\sin x + k = \int d(\sin x) \, dx$$

$$\sin x + k = \int \cos x \, dx$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + k$$

$$3. \int \sin^2 x \, dx = \dots$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) + k \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + k \end{aligned}$$

Contoh pengoperasiannya :

$$1. \int (\sin^2 x + \tan^2 x + 5 + \cos^2 x) \, dx$$

$$= \int (1 + \tan^2 x + 5) \, dx = \int (\sec^2 x + 5) \, dx = \tan x + 5x + C$$

$$2. \int \left(\sec \frac{1}{3} x \cdot \tan \frac{1}{3} x - \left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} \right) + \operatorname{cosec}^2 2x \right) \, dx$$

$$= \int \left(\sec \frac{1}{3} x \cdot \tan \frac{1}{3} x \right) \, dx - \int \left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} \right) \, dx + \int (\operatorname{cosec}^2 2x) \, dx$$

$$= 3 \sec \frac{1}{3} x - 2 \operatorname{arc} \sin \left(\frac{x}{3} \right) - \frac{1}{2} \cot 2x + C$$

$$3. \int \cos^5 x \, dx = \int (\cos^4 x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \int (\cos^2 x)^2 \cdot d(\sin x) = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot d(\sin x)$$

$$= \int (1 - \sin^2 x + \sin^4 x) \cdot d(\sin x)$$

$$= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

KESIMPULAN

Problem Based Learning (PBL) merupakan metode pembelajaran yang berpusat dengan pemecahan masalah serta pengembangan kemampuan berpikir kritis dalam materi antiderivatif. Antiderivatif merupakan bentuk operasi integral fungsional yang menghasilkan fungsi baru. Karena fungsi ini tidak memiliki nilai unik (dalam bentuk variabel) atau batas atas dan bawah, maka metode integrasilah yang melahirkan fungsi tak tentu tersebut. Antiderivatif dapat diselesaikan dengan cara terbalik atau terbalik, seperti pengurangan dengan penjumlahan, pembagian dengan perkalian, dan penambahan dengan mengambil akar. Dengan PBL, Siswa akan belajar dengan cara yang lebih mandiri dan mengevaluasi masalah sendiri untuk mengembangkan kemampuannya. Yang di mana siswa akan belajar dengan cara lebih aktif dan interaktif, efektif, efisien, menyenangkan, inisiatif, dan motivasi belajar pada saat belajar secara kelompok. Dengan demikian, PBL dapat digunakan menjadi metode pembelajaran yang efektif dalam mempelajari materi integral tak tentu.

DAFTAR PUSTAKA

- Ansori, M. R., Kartika, A., Natalia, D., & Hernaeny M. Pd, U. (2022). Station Learning: Analisis Implementasi Differentiation Learning dalam Pembelajaran Matematika Materi Kalkulus Integral. *HIMPUNAN: Jurnal Ilmiah Mahasiswa Pendidikan Matematika*.
- CIPTA, H. (2020). *Kalkulus Integral*. ResearchGate. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/339783227>
- Darmayanti, R. (2024). *Modul Integral Tak Tentu Fungsi Aljabar (Matematika Wajib) Kelas XI*. ResearchGate. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/377762570>
- Hasmiati, Jumadi, O., & Rachmawaty. (2018). Penerapan Model Problem Based Learning (PBL) dalam Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kreatif dan Hasil Belajar Siswa.