TRIGONOMETRI
ISSN 3030-8496

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

PERBANDINGAN METODE ITERASI GAUSS-SEIDEL DAN JACOBI IMPLEMENTASI DAN SIMULASI MENGGUNAKAN MATLAB

Ardicha Appu Sianturi[1], Dewi Fortuna Silaban[2], Riski Melanton Banjarnahor[3], Wenny Susanty Nainggolan[4*]

Program Studi Statistika, Universitas Negeri Medan, Medan, Indonesia

Email : nainggolansusanty@gmail.com

ABSTRACT

The system of linear equations is one of the main foundations in various science and technology applications, which is often solved using iterative methods such as Jacobi and Gauss-Seidel methods. This study aims to compare the two methods in terms of convergence speed, solution stability, and computational time efficiency. Simulations were conducted using MATLAB with a quantitative experimental approach on a diagonally dominant system of linear equations, which confirmed the convergence potential of the iterative methods. The implementation of the algorithm involves using the same initial values for both methods, with the process iterating until it reaches the convergence criterion or maximum limit of iterations. Simulation results show that the Gauss-Seidel Method is superior in convergence speed, requiring only 11 iterations to reach a solution, compared to 21 iterations in the Jacobi Method. In addition, the Gauss-Seidel Method shows better stability on the tested system, while the Jacobi Method has an advantage in the flexibility of parallel implementation. These findings provide important insights for users to choose numerical methods that suit specific needs, both in academic contexts and practical applications, especially for solving systems of linear equations in modern computing.

Keywords: *Linear Equation System, Iteration Method, Gauss-Seidel, Jacobi, MATLAB Simulation*

Article History
Received: Desember 2024
Reviewed: Desember 2024
Published: Desember 2024

Plagirism Checker No 223
DOI : 10.8734/Trigo.v1i2.365

PENDAHULUAN

Metode iterasi adalah teknik penting dalam menyelesaikan sistem persamaan linear yang kompleks. Di antara berbagai metode yang ada, metode Jacobi dan Gauss-Seidel merupakan pendekatan yang paling banyak digunakan karena kemudahannya dalam implementasi dan penerapannya yang luas di berbagai bidang. Keduanya menawarkan algoritma iteratif dengan karakteristik konvergensi yang berbeda, yang menjadi dasar penting untuk menentukan efisiensi dan akurasi dalam simulasi komputasi [1]

Metode Jacobi menggunakan pendekatan iteratif yang memanfaatkan hasil perhitungan dari iterasi sebelumnya untuk menyelesaikan seluruh elemen sistem secara serentak. Sebaliknya, metode Gauss-Seidel menggunakan hasil iterasi terbaru langsung setelah dihitung, yang seringkali mempercepat konvergensi pada matriks dengan struktur diagonal dominan [2]. Perbedaan ini memunculkan kebutuhan untuk membandingkan kedua metode dalam konteks efisiensi komputasi, terutama pada aplikasi numerik berbasis perangkat lunak seperti MATLAB.

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

Metode Gauss-Seidel umumnya lebih unggul dalam kecepatan konvergensi, meskipun metode Jacobi memiliki keunggulan dalam hal stabilitas dan implementasi pada sistem terdistribusi. MATLAB sebagai platform simulasi numerik mempermudah pengujian kedua metode ini, memungkinkan analisis performa dalam berbagai skenario sistem persamaan linear, seperti variasi ukuran matriks dan tingkat sparsitasnya[3].

Selain efisiensi, penting juga untuk mengevaluasi akurasi kedua metode. Penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa error pada metode Jacobi cenderung lebih besar dibandingkan dengan Gauss-Seidel untuk sistem tertentu. Namun, Jacobi tetap relevan untuk aplikasi dengan kebutuhan perhitungan paralel, karena proses iterasinya yang tidak bergantung pada hasil perhitungan terkini [1]

Penelitian ini bertujuan untuk melakukan perbandingan komprehensif antara metode Jacobi dan Gauss-Seidel melalui implementasi dan simulasi menggunakan MATLAB. Penggunaan metode iterasi Gauss-Seidel dan Jacobi, dengan implementasi yang tepat, dapat meningkatkan kecepatan konvergensi dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, bahkan pada sistem yang lebih besar dan kompleks. Evaluasi ini mencakup aspek konvergensi, akurasi, dan efisiensi pada berbagai sistem persamaan linear. Dengan analisis yang mendalam, diharapkan dapat memberikan rekomendasi metode yang paling sesuai berdasarkan kebutuhan spesifik dalam berbagai aplikasi numerik.

KAJIAN PUSTAKA

1. Sistem Persamaan Linear Sifat Dominasi Diagonal

Sistem persamaan linier (SPL) dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

di mana $\boldsymbol{A}$ adalah matriks koefisien $n \times n, \boldsymbol{x}$ adalah vektor solusi, dan $\boldsymbol{b}$ adalah vektor hasil (konstanta). Salah satu kondisi yang sangat penting untuk memastikan konvergensi metode iteratif seperti Jacobi dan Gauss-Seidel adalah dominasi diagonal pada matriks $\boldsymbol{A}$. Matriks $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]$ dikatakan dominan diagonal jika:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \, untuk \ setiap \ i = 1,2, \dots, n$$

Dimana a_{ii} adalah elemen diagonal utama dan a_{ij} adalah elemen-elemen lain pada baris i. Sifat dominasi diagonal ini sangat penting untuk memastikan kedua metode iteratif ini dapat mencapai konvergensi yang stabil dan efisien.

Selain itu, sistem persamaan linier yang memenuhi kondisi dominasi diagonal banyak digunakan dalam aplikasi ilmiah dan teknik, seperti dalam pemodelan aliran fluida dan simulasi struktur mekanik. Misalnya, dalam analisis struktur mekanik, matriks koefisien yang dihasilkan oleh metode elemen hingga sering kali memiliki sifat dominasi diagonal, yang memungkinkan penggunaan metode iteratif secara efisien [4]

Sistem persamaan linier dengan dominasi diagonal sering digunakan dalam aplikasi-aplikasi teknik dan ilmiah, karena sifat ini memberikan jaminan stabilitas numerik yang lebih baik dibandingkan dengan sistem yang tidak dominan diagonal. Sebagai contoh, dalam pemodelan aliran fluida atau simulasi rangkaian listrik, matriks yang dihasilkan sering kali memiliki dominasi diagonal, sehingga memungkinkan penggunaan metode iteratif dengan konvergensi yang lebih cepat[5].

Namun, sistem yang tidak memenuhi dominasi diagonal sering mengalami kesulitan dalam mencapai konvergensi, terutama ketika menggunakan metode Jacobi. Oleh karena itu,

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

penting untuk memastikan bahwa sistem persamaan linier memiliki sifat dominasi diagonal atau melakukan teknik preconditioning untuk memperbaiki konvergensi [6].

2. Metode Iterasi Jacobi

Metode iterasi Jacobi adalah salah satu teknik yang paling dasar untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dengan cara mengiterasikan solusi, di mana pada setiap langkah iterasi, nilai baru dari setiap elemen x_i dihitung berdasarkan nilai solusi sebelumnya. Formula umum metode Jacobi untuk sistem persamaan linier adalah:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_{i-}\sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)}\right)$$

$$untuk\ setiap\ i = 1,2,\dots,n\ dan\ iterasi\ k = 1,2,3,\dots,n$$

Pada setiap langkah iterasi, metode Jacobi menghitung nilai baru untuk x_i berdasarkan nilai $x_j^{(k-1)}$ dari iterasi sebelumnya untuk semua variabel x_1 , x_2 ,…, x_n . Dengan demikian, metode Jacobi sangat bergantung pada nilai solusi sebelumnya untuk seluruh variabel yang terlibat, sehingga perhitungan pada iterasi k menggunakan informasi dari iterasi $k-1$ untuk semua variabel.

Metode Jacobi cenderung lebih stabil dalam iterasi karena setiap nilai variabel diperbarui pada langkah yang sama, menggunakan nilai iterasi sebelumnya. Meskipun konvergensinya lebih lambat dibandingkan dengan Gauss-Seidel, metode ini menawarkan kemudahan dalam aplikasi paralel dan lebih cocok untuk sistem yang sangat besar, di mana pembaruan nilai dilakukan secara bersamaan[7]

Jacobi lebih lambat dalam konvergensi, metode ini masih banyak digunakan dalam aplikasi komputasi paralel berkat kemampuannya untuk diimplementasikan dengan efisien dalam sistem yang besar. Sebaliknya, untuk sistem dengan dominasi diagonal yang kuat, metode Jacobi masih cukup efektif, namun Gauss-Seidel akan lebih unggul dalam hal kecepatan konvergensi, karena Gauss-Seidel memperbarui nilai setiap variabel secara langsung selama iterasi [8]

3. Metode Iterasi Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel adalah metode iteratif yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Berbeda dengan metode Jacobi, yang menggunakan nilai iterasi sebelumnya untuk semua variabel, metode Gauss-Seidel memperbarui nilai variabelnya segera setelah dihitung pada setiap iterasi. Hal ini menyebabkan Gauss-Seidel lebih cepat dalam konvergensi dibandingkan metode Jacobi pada banyak kasus, terutama pada sistem dengan dominasi diagonal. Metode iterasi Gauss-Seidel dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_{i-}\sum\nolimits_{j=i}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)} - \sum\nolimits_{j=i+1}^{r} a_{ij}\, x_j^{(k-1)}\right)$$

Metode Gauss-Seidel secara signifikan meningkatkan kecepatan konvergensi dalam penyelesaian sistem persamaan linear, terutama untuk masalah teknik yang memerlukan presisi tinggi. Dalam metode ini, pembaruan nilai variabel dilakukan segera setelah dihitung, yang membuat metode ini lebih cepat dibandingkan dengan metode iterasi lainnya, seperti Jacobi, pada beberapa jenis matriks sistem [9]

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

Metode Gauss-Seidel yang telah digeneralisasi memberikan solusi yang lebih fleksibel dan efisien untuk sistem persamaan linear, terutama pada sistem yang sangat besar dan kompleks. Generalisasi ini memungkinkan pendekatan yang lebih cepat untuk konvergensi, dengan memperbaiki stabilitas dan akurasi iterasi, sehingga meningkatkan kinerja metode pada berbagai jenis masalah numerik yang lebih rumit [10]

Metode Gauss-Seidel menunjukkan kemampuan yang baik dalam menyelesaikan sistem persamaan linier, terutama ketika diterapkan pada sistem dengan ketidakpastian atau data yang tidak pasti. Dengan penerapan metode ini, efisiensi dalam konvergensi dapat ditingkatkan, meskipun dihadapkan pada masalah kompleks yang melibatkan variabel yang tidak dapat dipastikan.

Dalam sistem yang memiliki dominasi diagonal yang kuat, Gauss-Seidel dapat mencapai konvergensi lebih cepat dibandingkan metode Jacobi. Gauss-Seidel lebih efisien untuk sistem besar yang memenuhi syarat dominasi diagonal, karena metode ini dapat mengurangi jumlah iterasi yang diperlukan untuk mencapai solusi yang diinginkan

METODE PENELITIAN

1. Pendekatan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif eksperimen dengan simulasi numerik berbasis MATLAB. Fokus utama adalah membandingkan efisiensi konvergensi, stabilitas, dan implementasi algoritma Metode Jacobi dan Metode Gauss-Seidel dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier yang digunakan memiliki sifat dominan diagonal untuk memastikan potensi konvergensi kedua metode. Metode Jacobi dan Gauss-Seidel dipilih karena keduanya merupakan teknik iteratif yang umum digunakan dalam analisis numerik dan mampu menyelesaikan sistem persamaan linier besar dengan efisien.

2. Desain Penelitian

Penelitian ini dirancang dalam empat tahap utama: (1) implementasi algoritma menggunakan MATLAB, (2) simulasi iterasi hingga konvergensi, (3) pengumpulan data hasil iterasi, termasuk waktu eksekusi dan jumlah iterasi, serta (4) analisis hasil komputasi untuk menilai kecepatan konvergensi, stabilitas, dan efisiensi kedua metode.

3. Tahapan Penelitian

Implementasi Algoritma di MATLAB:

Algoritma Jacobi dan Gauss-Seidel ditulis dalam skrip MATLAB dengan input berupa sistem persamaan linier dominan diagonal. Metode Jacobi memperbarui nilai variabel $x1, x2, x3$, pada iterasi ke$-\ k+1$ hanya menggunakan nilai-nilai dari iterasi ke-kkk, sesuai dengan rumus:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} a_j^{(k)}\right)$$

Sedangkan algoritma Gauss-Seidel memperbarui nilai variabel $x_i$secara langsung dalam iterasi yang sama, sehingga nilai yang baru diperoleh langsung digunakan untuk perhitungan variabel berikutnya:

ISSN 3030-8496
Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}a_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}a_j^{(k)}\right)$$

Untuk menjaga perbandingan yang adil, nilai awal variabel $x1, x2, x3$ disamakan pada kedua metode.

Simulasi Iteratif

Simulasi iterasi dilakukan hingga mencapai kriteria konvergensi dengan toleransi $\varepsilon = 10^{-5}$ atau maksimal iterasi sebanyak 100 untuk kedua metode. Setiap iterasi merekam nilai variabel serta waktu eksekusi menggunakan fungsi *tic* dan *toc* pada MATLAB untuk membandingkan efisiensi kedua metode.

Pengumpulan Data

Data yang dikumpulkan mencakup:

1. Jumlah Iterasi: Untuk mengukur kecepatan konvergensi masing-masing metode.
2. Grafik Konvergensi: Memvisualisasikan stabilitas nilai $x1, x2, x3$ dalam iterasi.
3. Waktu Eksekusi: Dicatat untuk membandingkan efisiensi komputasi kedua metode.

Analisis Hasil

1. Konvergensi: Dilihat dari jumlah iterasi yang diperlukan hingga solusi stabil.
2. Stabilitas: Fluktuasi awal diamati dari grafik iterasi untuk mengevaluasi kestabilan solusi.
3. Efisiensi Komputasi: Dibandingkan berdasarkan waktu eksekusi masing-masing metode.

4. Peralatan Penelitian

Perangkat lunak yang digunakan adalah MATLAB versi terbaru, sementara perangkat keras berupa komputer dengan spesifikasi prosesor multi-core dan RAM 8 GB untuk memastikan performa optimal dalam simulasi numerik.

5. Kriteria Evaluasi

Evaluasi dilakukan berdasarkan:

1. Kecepatan Konvergensi: Dihitung dari jumlah iterasi yang diperlukan untuk mencapai solusi.
2. Stabilitas Konvergensi: Diamati dari grafik iterasi yang menunjukkan kestabilan nilai variabel.
3. Efisiensi Komputasi: Waktu eksekusi digunakan sebagai tolok ukur efisiensi kedua metode.

6. Etika Penelitian

Semua kode dan simulasi dilakukan menggunakan perangkat lunak legal, serta hasil penelitian dilaporkan sesuai dengan standar akademik, menjaga integritas dan kejujuran ilmiah.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Syntax Matlab Menggunakan Metode Jacobi

Berikut ini ditampilkan sintaks MATLAB yang digunakan untuk implementasi Metode Jacobi dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Dalam implementasi ini,

ISSN 3030-8496
Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

algoritma iteratif digunakan untuk menghitung solusi dengan memperbarui nilai setiap variabel berdasarkan nilai iterasi sebelumnya.

```
%Metode Jacobi
% Inisialisasi
max_iter = 100; % Jumlah iterasi maksimum
tolerance = 1e-5; % Toleransi konvergensi
x = zeros(3, 1); % Vektor solusi awal
x_old = x; % Vektor solusi sebelumnya

% Menyimpan nilai untuk grafik dan tabel
x_history = zeros(max_iter, 3); % Menyimpan nilai x1, x2, x3 untuk setiap iterasi

% Iterasi Jacobi
for iter = 1:max_iter
    % Hitung nilai baru untuk x1, x2, dan x3
    x(1) = (1 - 3*x_old(2) + 5*x_old(3)) / 12; % x1
    x(2) = (28 - x_old(1) - 3*x_old(3)) / 5;  % x2
    x(3) = (76 - 3*x_old(1) - 7*x_old(2)) / 13; % x3

    % Simpan nilai untuk grafik dan tabel
    x_history(iter, :) = x';

    % Periksa konvergensi
    if norm(x - x_old, inf) < tolerance
        fprintf('Konvergensi tercapai setelah %d iterasi\n', iter);
        x_history = x_history(1:iter, :); % Potong array untuk iterasi yang sebenarnya
        break;
    end

    % Update x_old untuk iterasi berikutnya
    x_old = x;
end

% Tampilkan hasil
fprintf('Solusi: x1 = %.4f, x2 = %.4f, x3 = %.4f\n', x(1), x(2), x(3));

% Tampilkan tabel iterasi
disp('Tabel Iterasi:')
fprintf('Iterasi\t   x1\t\t   x2\t\t   x3\n');
fprintf('--------------------------------------------\n');
for i = 1:size(x_history, 1)
    fprintf('%d\t\t%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', i, x_history(i, 1), x_history(i, 2), x_history(i, 3));
end

% Grafik konvergensi
figure;
plot(1:size(x_history, 1), x_history(:, 1), 'r-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(1:size(x_history, 1), x_history(:, 2), 'g-', 'LineWidth', 2);
plot(1:size(x_history, 1), x_history(:, 3), 'b-', 'LineWidth', 2);
xlabel('Iterasi');
ylabel('Nilai');
title('Konvergensi Metode Jacobi');
legend('x1', 'x2', 'x3');
grid on;
```

Gambar 1. Syntax Matlab Menggunakan Metode Jacobi

Di atas adalah kode sintaks MATLAB yang digunakan untuk mengimplementasikan Metode Jacobi dalam penyelesaian sistem persamaan linier. Sintaks ini menunjukkan cara perhitungan iteratif berdasarkan nilai sebelumnya untuk setiap variabel dalam sistem, sesuai dengan prinsip dasar metode Jacobi.

2. Syntax Matlab Menggunakan Metode Gauss- Seidel

Di bawah ini adalah kode sintaks MATLAB untuk implementasi metode Gauss-Seidel, yang memperlihatkan cara perhitungan iteratif pada setiap variabel dengan pembaruan langsung selama iterasi.

Berikut adalah kode sintaks MATLAB yang digunakan untuk mengimplementasikan Metode Gauss-Seidel dalam penyelesaian sistem persamaan linier. Dalam kode ini, setiap variabel x_i dihitung dengan menggunakan nilai yang telah diperbarui pada iterasi yang sama untuk variabel-variabel sebelumnya, yang mempercepat proses konvergensi dibandingkan dengan metode Jacobi. Sintaks ini juga menunjukkan langkah-langkah perhitungan iteratif pada setiap variabel dengan pembaruan langsung selama iterasi.

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

```
%Metode Gauss Seidel
% Inisialisasi
max_iter = 100; % Jumlah iterasi maksimum
tolerance = 1e-5; % Toleransi konvergensi
x = zeros(3, 1); % Vektor solusi awal
x_old = x; % Vektor solusi sebelumnya

% Menyimpan nilai untuk grafik dan tabel
x_history = zeros(max_iter, 3); % Menyimpan nilai x1, x2, x3 untuk setiap iterasi

% Iterasi Gauss-Seidel
for iter = 1:max_iter
    % Hitung nilai baru untuk x1, x2, dan x3
    x(1) = (1 - 3*x(2) + 5*x(3)) / 12; % x1
    x(2) = (28 - x(1) - 3*x(3)) / 5;  % x2
    x(3) = (76 - 3*x(1) - 7*x(2)) / 13; % x3

    % Simpan nilai untuk grafik dan tabel
    x_history(iter, :) = x';

    % Periksa konvergensi
    if norm(x - x_old, inf) < tolerance
        fprintf('Konvergensi tercapai setelah %d iterasi\n', iter);
        x_history = x_history(1:iter, :); % Potong array untuk iterasi yang sebenarnya
        break;
    end

    % Update x_old untuk iterasi berikutnya
    x_old = x;
end
% Tampilkan hasil
fprintf('Solusi: x1 = %.4f, x2 = %.4f, x3 = %.4f\n', x(1), x(2), x(3));

% Tampilkan tabel iterasi
disp('Tabel Iterasi:')
fprintf('Iterasi\t   x1\t\t   x2\t\t   x3\n');
fprintf('-------------------------------------------\n');
for i = 1:size(x_history, 1)
    fprintf('%d\t\t%.4f\t\t%.4f\t\t%.4f\n', i, x_history(i, 1), x_history(i, 2), x_history(i, 3));
end

% Grafik konvergensi
figure;
plot(1:size(x_history, 1), x_history(:, 1), 'r-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(1:size(x_history, 1), x_history(:, 2), 'g-', 'LineWidth', 2);
plot(1:size(x_history, 1), x_history(:, 3), 'b-', 'LineWidth', 2);
xlabel('Iterasi');
ylabel('Nilai');
title('Konvergensi Metode Gauss-Seidel');
legend('x1', 'x2', 'x3');
grid on;
```

Gambar 2. Syntax Matlab Menggunakan Metode Gauss-Seidel

3. Hasil Command Window dan Grafik Metode Jacobi

Berikut ini adalah hasil dari Command Window yang menunjukkan konvergensi untuk Metode
Jacobi.

```
Konvergensi tercapai setelah 21 iterasi
Solusi: x1 = 1.0000, x2 = 3.0000, x3 = 4.0000
Tabel Iterasi:
```

Iterasi	x1	x2	x3
1	0.0833	5.6000	5.8462
2	1.1192	2.0756	2.8115
3	0.7359	3.6892	4.4702
4	1.0236	2.7707	3.6898
5	0.9281	3.1814	4.1180
6	1.0038	2.9436	3.9189
7	0.9803	3.0479	4.0295
8	1.0003	2.9862	3.9788
9	0.9946	3.0127	4.0073
10	0.9999	2.9967	3.9944
11	0.9985	3.0034	4.0018
12	0.9999	2.9992	3.9985
13	0.9996	3.0009	4.0004
14	1.0000	2.9998	3.9996
15	0.9999	3.0002	4.0001
16	1.0000	3.0000	3.9999
17	1.0000	3.0001	4.0000
18	1.0000	3.0000	4.0000
19	1.0000	3.0000	4.0000
20	1.0000	3.0000	4.0000
21	1.0000	3.0000	4.0000

Gambar 3. Hasil Command Konvergensi Metode Jacobi

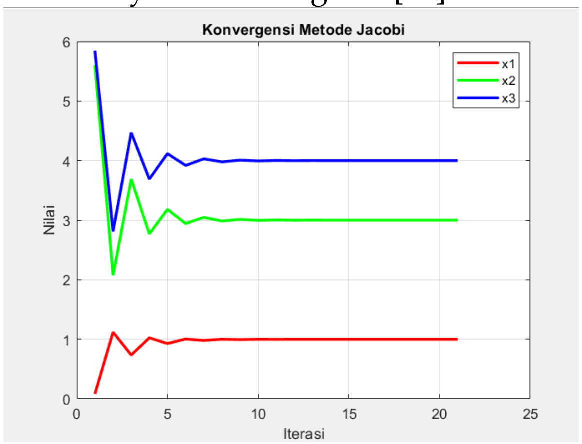
Gambar 3 menunjukkan proses iterasi Metode Jacobi hingga mencapai konvergensi pada iterasi ke-21. Dalam tabel ini kolom pertama mencantumkan nomor iterasi, dan kolom

ISSN 3030-8496
Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

berikutnya menunjukkan nilai-nilai variabel x_1 , x_2, dan x_3 pada setiap iterasi.

Pada iterasi awal, nilai-nilai variabel x_1 , x_2, dan x_3 menunjukkan perubahan signifikan. Seperti pada iterasi pertama, $x_1 = 0.0833$, $x_2 = 5.6000$, dan $x_3 = 5.8462$. Namun, seiring bertambahnya iterasi, nilai variabel mulai stabil dan akhirnya konvergen ke $x_1 = 1.0000, x_2 = 3.0000, dan\ x_3 = 4.0000.$ Konvergensi ini sesuai dengan karakteristik Metode Jacobi, di mana nilai setiap variabel diperbarui secara independen berdasarkan nilai dari iterasi sebelumnya. Konvergensi Metode Jacobi dijamin apabila matriks koefisien dari sistem persamaan linier bersifat dominan diagonal [11]

Selain itu, pola perubahan nilai variabel dalam tabel menunjukkan stabilitas iterasi. Seperti pada iterasi ke-20 dan 21, nilai semua variabel sudah tidak berubah, yang menandakan tercapainya solusi akhir. Metode Jacobi cenderung memerlukan iterasi lebih banyak dibandingkan metode lain, seperti Gauss-Seidel, tetapi tetap andal untuk sistem persamaan linier yang memenuhi syarat konvergensi [12]



Gambar 4. Grafik Konvergensi Metode Jacobi

Pada metode iterasi Jacobi, grafik menunjukkan proses konvergensi nilai solusi untuk variabel x_1 , x_2, dan x_3 yang berlangsung dengan pola tertentu. Pada awal iterasi, terlihat grafik yang curam, khususnya pada variabel x_1 , x_2, dan x_3, yang mencerminkan adanya osilasi nilai yang cukup besar sebelum mendekati kestabilan. Hal ini menandakan bahwa metode Jacobi membutuhkan waktu lebih lama untuk menyelesaikan osilasi awal sebelum mencapai titik konvergensi. Setelah beberapa iterasi, grafik mulai melandai, menunjukkan bahwa nilai-nilai solusi dari x_1 , x_2, dan x_3 perlahan stabil. Meski demikian, kestabilan penuh baru tercapai setelah lebih dari 20 iterasi.

Grafik variabel x_1 terlihat lebih cepat mendekati kestabilan dibandingkan x_2, dan x_3, namun keseluruhan metode tetap membutuhkan iterasi yang lebih banyak. Pola ini menunjukkan bahwa metode Jacobi memiliki proses iterasi yang bersifat independen, di mana setiap variabel diperbarui hanya berdasarkan hasil dari iterasi sebelumnya, sehingga mengurangi kecepatan konvergensi. Osilasi awal ini sering kali lebih signifikan jika matriks koefisien sistem persamaan linear tidak cukup dominan secara diagonal, sehingga metode ini kurang efisien pada beberapa jenis sistem persamaan[8]

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

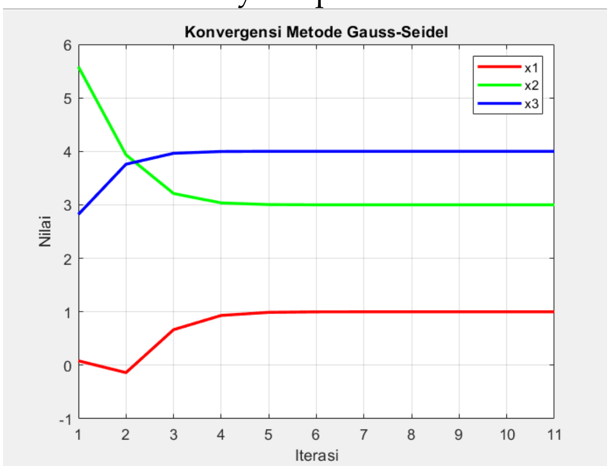
4. Hasil Command Window dan Grafik Metode Gauss-Seidel

```
Konvergensi tercapai setelah 11 iterasi
Solusi: x1 = 1.0000, x2 = 3.0000, x3 = 4.0000
Tabel Iterasi:
Iterasi    x1          x2          x3
------------------------------------------
1       0.0833      5.5833      2.8205
2       -0.1373     3.9351      3.7589
3       0.6658      3.2115      3.9632
4       0.9318      3.0357      3.9965
5       0.9896      3.0042      4.0002
6       0.9990      3.0001      4.0002
7       1.0000      2.9999      4.0000
8       1.0000      3.0000      4.0000
9       1.0000      3.0000      4.0000
10      1.0000      3.0000      4.0000
11      1.0000      3.0000      4.0000
```

Gambar 5. Hasil Command Konvergensi Metode Gauss-Seidel

Hasil konvergensi metode Gauss-Seidel pada gambar 3 menunjukkan bahwa solusi untuk sistem persamaan linier tercapai setelah 11 iterasi dengan nilai akhir $x_1 = 1.0000, x_2 = 3.0000, dan\ x_3 = 4.0000$. Pada iterasi pertama, nilai awal variabel $x_1 = 0.0833, x_2 = 5.5833, dan\ x_3 = 2.8205$ yang jauh dari solusi akhirnya. Namun, metode ini mampu secara bertahap memperbaiki nilai variabel di setiap iterasi dengan memanfaatkan solusi yang diperoleh pada iterasi yang sama untuk perhitungan berikutnya. Misalnya, pada iterasi kelima, nilai $x_1 = 0.9896, x_2 = 3.0042, dan\ x_3 = 4.0002$, yang sudah hampir mendekati solusi akhir. Konvergensi penuh tercapai pada iterasi ke-11, di mana nilai semua variabel tidak lagi mengalami perubahan yang signifikan hingga presisi empat desimal.

Stabilitas yang tercapai pada iterasi ke-7 hingga ke-11 mengindikasikan bahwa metode Gauss-Seidel sangat efektif untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, terutama yang memenuhi syarat dominan diagonal. Kecepatan konvergensi ini juga membuktikan keunggulan metode Gauss-Seidel dibandingkan metode Jacobi[13]. Metode Gauss-Seidel sangat stabil dalam menyelesaikan sistem persamaan linier, bahkan ketika nilai awal tidak terlalu dekat dengan solusi . Dengan demikian, hasil ini mendukung temuan bahwa metode ini sangat cocok untuk digunakan pada sistem persamaan linier dengan matriks dominan diagonal, di mana efisiensi dan stabilitasnya dapat diandalkan.



Gambar 6. Grafik Konvergensi Metode Gauss-Seidel

Grafik untuk metode iterasi Gauss-Seidel menunjukkan pola yang lebih stabil dan efisien. Pada awal iterasi, grafik setiap variabel, terutama x_1 , dan x_2, memiliki kemiringan yang curam, menandakan perubahan nilai solusi yang besar dan cepat. Hal ini menunjukkan

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

bahwa metode ini langsung melakukan pembaruan solusi dengan memanfaatkan hasil terbaru dari iterasi sebelumnya secara langsung. Setelah iterasi ketiga, grafik mulai melandai secara signifikan untuk semua variabel, mencerminkan bahwa solusi mendekati kestabilan..

Tidak seperti metode Jacobi, grafik metode Gauss-Seidel tidak menunjukkan adanya osilasi awal yang signifikan. Dalam waktu sekitar 10 iterasi, nilai solusi x_1 , x_2, dan x_3, mencapai kestabilan penuh. Karakteristik ini mencerminkan keunggulan metode Gauss-Seidel yang menggunakan pendekatan iterasi asinkron, di mana pembaruan solusi dilakukan secara langsung selama proses iterasi. Pendekatan ini memberikan akselerasi terhadap proses konvergensi, sehingga grafik menunjukkan pola yang lebih stabil dan efisien. Stabilitas grafik yang lurus pada iterasi akhir menunjukkan bahwa solusi untuk setiap variabel sudah konvergen dan tidak lagi mengalami perubahan.

5. Analisis Perbandingan Metode Jacobi dan Gauss-Seidel

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linier, metode iteratif seperti Jacobi dan Gauss-Seidel memiliki keunggulan dan kekurangan masing-masing. Berdasarkan hasil pembahasan sebelumnya, berikut adalah analisis perbandingan kedua metode yang telah disesuaikan dengan hasil yang diperoleh:

1) Kecepatan Konvergensi

Metode Gauss-Seidel terbukti lebih cepat dalam mencapai konvergensi dibandingkan metode Jacobi. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa metode Gauss-Seidel mencapai konvergensi dalam 11 iterasi, sedangkan metode Jacobi memerlukan 21 iterasi. Keunggulan ini disebabkan oleh penggunaan nilai terbaru dari variabel yang telah diperbarui dalam iterasi yang sama. Hal ini memungkinkan metode Gauss-Seidel untuk memperbaiki nilai variabel secara lebih cepat[14].

Sebaliknya, metode Jacobi menggunakan nilai variabel dari iterasi sebelumnya secara keseluruhan, sehingga perubahan nilai dalam satu iterasi tidak langsung memengaruhi variabel lainnya. Metode Gauss-Seidel lebih efisien dalam iterasi karena memanfaatkan pembaruan langsung pada iterasi yang sama. Dengan demikian, metode ini lebih unggul dalam kasus di mana kecepatan komputasi menjadi prioritas[15].

Dalam hal stabilitas, metode Gauss-Seidel cenderung lebih stabil terutama pada sistem persamaan linier yang memenuhi sifat matriks dominan diagonal. Stabilitas metode ini terlihat dari hasil pembahasan, di mana nilai variabel x_1 , x_2, dan x_3 pada metode Gauss-Seidel mulai stabil sejak iterasi ke-7 hingga ke-11, sementara pada metode Jacobi, kestabilan baru dicapai setelah iterasi ke-18.

Jacobi, meskipun sederhana dalam implementasinya, lebih sensitif terhadap kondisi awal dan matriks koefisien. Jika sistem persamaan tidak memenuhi syarat tertentu, seperti dominan diagonal, metode ini dapat gagal mencapai konvergensi. Metode Jacobi memerlukan kondisi awal dan struktur matriks yang lebih spesifik untuk menjamin stabilitas dan konvergensi.

2) Implementasi dan Komputasi

Metode Jacobi memiliki keunggulan dalam hal implementasi untuk komputasi paralel. Karena setiap iterasi tidak bergantung pada nilai yang diperbarui dalam iterasi yang sama, proses ini memungkinkan pembagian tugas yang lebih mudah dalam lingkungan komputasi paralel. Hal ini membuat Jacobi lebih sesuai untuk aplikasi yang

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

melibatkan sistem dengan skala besar, seperti simulasi fisika atau pemodelan jaringan

Sebaliknya, metode Gauss-Seidel memiliki ketergantungan antara perhitungan dalam satu iterasi, yang membuatnya lebih rumit untuk diimplementasikan dalam komputasi paralel. Namun, untuk kasus dengan skala kecil hingga menengah, Gauss-Seidel lebih efisien karena jumlah iterasi yang lebih sedikit.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, metode Gauss-Seidel lebih unggul dalam kecepatan konvergensi dan stabilitas, terutama untuk sistem persamaan linier dengan matriks dominan diagonal. Hal ini disebabkan oleh penggunaan nilai variabel yang diperbarui secara langsung, yang mempercepat proses menuju solusi. Sebaliknya, metode Jacobi lebih fleksibel untuk implementasi paralel, menjadikannya pilihan ideal untuk sistem skala besar dengan kebutuhan komputasi tinggi. Namun, metode ini memerlukan perhatian khusus terhadap kondisi awal dan struktur matriks untuk memastikan konvergensi.

Pemilihan metode harus disesuaikan dengan kebutuhan, seperti kecepatan penyelesaian, stabilitas, dan kapasitas komputasi. Dengan memahami keunggulan masing-masing, pengguna dapat memilih metode yang paling optimal atau bahkan mengombinasikan keduanya untuk mendapatkan hasil yang lebih efisien dan akurat.

DAFTAR PUSTAKA

[1] A. Bakari and I. Dahiru, "Comparison of Jacobi and Gauss-Seidel Iterative Methods for the Solution of Systems of Linear Equations," *Asian Res. J. Math.*, vol. 8, no. 3, pp. 1–7, 2018, doi: 10.9734/arjom/2018/34769.

[2] H. HarpinderKaur, "Convergence of Jacobi and Gauss-Seidel Method and Error Reduction Factor," *IOSR J. Math.*, vol. 2, no. 2, pp. 20–23, 2012, doi: 10.9790/5728-0222023.

[3] A. Sunarto, T. Matematika, and I. Bengkulu, "Komputasi Numerik Metode Iteratif Half-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel Untuk Memecahkan Persamaan Resepan Pecahan Waktu Numerical Computation Half-Sweep Preconditioned Gauss-Seidel Method To Solve Prescription Equations in Fraction of Time," *J. Inf. Technol. Comput. Sci.*, vol. 4, no. 2, p. 2021, 2021.

[4] L. Maydawati, "Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dengan Metode Subsitusi dan Eliminasi," vol. 02, no. 01, pp. 46–50, 2024.

[5] B. Amelia, "Sistem Persamaan Linear dengan Metode Gauss Seidel," vol. 02, no. 02, pp. 132–136, 2024.

[6] I. K. A. Atmika, *Metode Numerik*, vol. 1, no. August. 2016.

[7] A. Ramadhan and A. Sirait, "Analisis Konvergensi Metode Iterasi Jacobi dalam Menyelesaikan Persamaan Sistem Linier Matriks," *Dunia Ilmu*, vol. 3, no. 1, pp. 1–13, 2023.

[8] B. Widya Efriani , Syamsudhuha, "Metode Iterasi Jacobi Dan Gauss-Seidel Prekondisi Untuk Menyelesaikan Sistem Persaman Linear Dengan M -Matriks," *Jom Fmipa*, vol. 1, no. 2, pp. 408–416, 2014.

[9] I. Rohmah *et al.*, "Implementation of Gauss-Seidel Iteration Method To Solve Complex Linear Equation System," pp. 2007–2020, 2007.

[10] A. Ramadhan and A. Sirait, "Generalisasi Metode Gauss-Seidel Untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear," *Jom Fmipa*, vol. 1, no. 2, pp. 351–358, 2014.

[11] Onard, "JURNAL Christofel S. Sualang _060213067_-1," 2015.

Jurnal Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Vol 5 No 2 Tahun 2024.
Prefix DOI : 10.8734/trigo.v1i2.365

[12] D. K. Salkuyeh, "Generalized Jacobi and Gauss-Seidel Methods for Solving Linear System of Equations," *Numer. Math. A J. Chinese Univ.*, vol. 16, no. 2, pp. 164–170, 2007, [Online]. Available: http://www.global-sci.org/nm/volumes/v16n2/pdf/660324.pdf

[13] M. F. Sherman, R. J. ACSmith, and N. C. Sherman, "X 2 X 2," vol. 2, pp. 719–728, 1983.

[14] B. Pu and X. Yuan, "The alternate iterative Gauss-Seidel method for linear systems," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1411, no. 1, 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1411/1/012008.

[15] E. Wandalia, "MATRIKS," vol. 3, no. 1, pp. 1–13, 2023.