

PERAN KALKULUS MULTIVARIABLE DALAM PEMODELAN FENOMENA ALAM

Fikri Agustin¹, Giovani Br Surbakti², Erguna Eliandro Junior Tarigan³, Nurul Maulida Surbakti⁴

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Email : fikriagustinn@gmail.com

ABSTRAK

Kalkulus multivariable memiliki peran penting dalam pemodelan fenomena alam, khususnya untuk memahami dan memprediksi kejadian seperti banjir. Penelitian ini bertujuan untuk mengaplikasikan konsep kalkulus multivariable dalam memodelkan fenomena alam melalui pendekatan matematis. Fokus penelitian adalah menganalisis faktor-faktor yang mempengaruhi terjadinya banjir, seperti curah hujan, dan ketinggian permukaan tanah. Melalui pendekatan kalkulus multivariable, data-data tersebut diolah menjadi model matematis untuk memprediksi kapan dan di mana banjir kemungkinan terjadi. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penggunaan kalkulus multivariable dapat memberikan prediksi yang lebih akurat dengan mempertimbangkan variabel-variabel yang saling berinteraksi dalam suatu sistem. Dengan demikian, model ini dapat dijadikan sebagai salah satu metode dalam mitigasi bencana banjir, terutama di daerah rawan seperti Kota Medan.

Kata Kunci : Kalkulus Multivariable, Pemodelan Matematis, Fenomena Alam

ABSTRACT

Multivariable calculus has an important role in modeling natural phenomena, especially for understanding and predicting events such as floods. This research aims to apply the concept of multivariable calculus in modeling natural phenomena through a mathematical approach. The focus of the research is to analyze the factors that influence flooding, such as rainfall and land surface height. Through a multivariable calculus approach, this data is processed into a mathematical model to predict when and where flooding is likely to occur. The research results show that the use of multivariable calculus can provide more accurate predictions by considering the variables that interact with each other in a system. Thus, this model can be used as a method for mitigating flood disasters, especially in vulnerable areas such as Medan City.

Keywords : Multivariable Calculus, Mathematical Modeling, Natural Phenomena

Article History

Received: Desember 2024

Reviewed: Desember 2024

Published: Desember 2024

Plagiarism Checker No 223

DOI : 10.8734/Trigo.v1i2.365

Copyright : Author

Publish by : Trigonometri



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

Kalkulus Multivariabel merupakan lanjutan dari Kalkulus Diferensial dan Kalkulus Integral. Dasar materi Kalkulus Multivariabel juga terdapat dalam Geometri Dasar dan Geometri Ruang, khususnya menggambar grafik di R². Materi perkuliahan ini mempelajari tentang koordinat kartesius di R³, fungsi, turunan dan integral n variabel. Materi koordinat kartesius di R³ yang pertama pengenalan koordinat kartesius, titik dan jarak di R³, menggambar grafik persamaan linier, dan menggambar grafik persamaan kuadrat. Materi menggambar grafik di R³ ini nantinya akan digunakan saat mempelajari materi integral n variabel. Melalui penguasaan menggambar grafik di R³ ini, harapannya pada saat menentukan daerah benda pejal di integral n variable tidak mengalami kesulitan.(Purnomo, 2017)

Pemodelan matematika adalah alat penting untuk memahami dunia. Di masa lalu orang Cina, Mesir, India, Babilonia, dan Yunani menuruti pemahaman dan memprediksi fenomena alam melalui pengetahuan matematika.(Appendix, 2024)

Pemodelan matematika memainkan peran yang semakin penting di seluruh luasnya ilmu pengetahuan. Meskipun sebagian besar orang menyadari dampaknya yang besar matematika telah ada dalam fisika, hanya pada masa pandemi yang lalu 18 bulan masyarakat luas telah menyadari bahwa pemodelan matematika telah dilakukan penerapan yang lebih luas.(Sandip, 2022)

LANDASAN TEORI

Kalkulus multivariable adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel bebas. Dikarenakan fenomena banjir dapat dipengaruhi oleh banyak faktor bersamaan, seperti lokasi geografis(x,y), waktu(t) dan variabel lingkungan yang lain yaitu curah hujan(R), aliran air(q), dan ketinggian air(h). Maka dari itu, kalkulus multivariable adalah instrumen matematis tunggal yang diperlukan untuk memahami dan memodelkan fenomena ini.

Model-model banjir berdasarkan kalkulus multivariable didasarkan pada data empiris: curah hujan, topografi, kapasitas penyerapan air tanah. Data ini dikeluarkan oleh badan meteorologi dan klimatologi, pusat meteorologi lokal, dan badan hidrologi.

Dengan menggunakan grid topografi dan data curah hujan dijalankan stimulasi dengan metode kemungkinan maksimal atau morfologi jejak drainage. Grid dapat digunakan untuk menciptakan model distribusi air dalam ruang dan waktu dengan menerapkan persamaan-persamaan biasa diferensial parsial. Kemampuan untuk memperkirakan longsor dan banjir berdasarkan titik kontrol topografi ini memungkinkan pendekatan yang lebih terukur ke analisis risiko.

1) Turunan Parsial

Turunan parsial adalah turunan suatu fungsi terhadap satu variabel saja, sementara variabel lain dianggap konstan. Misalnya, jika $h(x,y,t)$ adalah ketinggian air sebagai fungsi dari lokasi dan waktu, maka:

- $\frac{\partial h}{\partial t}$ menggambarkan perubahan ketinggian air terhadap waktu di suatu lokasi tertentu.
- $\frac{\partial h}{\partial x}$ dan $\frac{\partial h}{\partial y}$ menunjukkan perubahan ketinggian air terhadap posisi geografis (arah horizontal).

2) Gradien

Gradien (∇h) adalah vektor yang terdiri dari turunan parsial suatu fungsi terhadap semua variabelnya. Gradien menunjukkan arah perubahan tercepat dari suatu fungsi. Dalam pemodelan banjir, gradien digunakan untuk mengetahui arah aliran air pada permukaan tanah.

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$$

Gradien ini memberikan informasi ke mana air mengalir berdasarkan perubahan ketinggian permukaan.

3) Divergensi

Divergensi ($\nabla \cdot q$) mengukur seberapa banyak aliran air (q) yang terkumpul atau menyebar di suatu area. Jika divergensi negatif, itu berarti terjadi akumulasi air (potensi genangan atau banjir). Sebaliknya, jika positif, berarti air menyebar keluar dari wilayah tersebut. Divergensi didefinisikan sebagai:

$$\nabla \cdot q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}$$

di mana q_x dan q_y adalah komponen aliran air pada sumbu x dan y .

4) Aplikasi dalam Pemodelan

Kombinasi turunan parsial, gradien, dan divergensi diterapkan dalam persamaan kontinuitas, yang memodelkan distribusi air di wilayah tertentu:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (hv) = R - E - Q$$

- $\frac{\partial h}{\partial t}$: Perubahan ketinggian air terhadap waktu.
- $\nabla \cdot (hv)$: Perubahan distribusi aliran air di wilayah.
- R : Curah hujan.
- E : Penguapan.
- Q : Air yang keluar dari sistem (melalui drainase atau aliran ke sungai).

5) Persamaan Diferensial Parsial

dunia ditentukan oleh struktur dalam ruang dan waktu, dan dunia selalu berubah dengan cara yang rumit dan tidak dapat diselesaikan secara pasti. oleh karena itu solusi numerik persamaan diferensial parsial mengarah pada beberapa tugas yang paling penting dan intensif secara komputasi dalam semua analisis numerik (seperti meramalkan cuaca). sama seperti kita menggunakan ekspansi Taylor untuk memperoleh perkiraan numerik persamaan diferensial biasa. karena diskritisasi harus dilakukan dalam ruang dan waktu, terdapat lebih banyak kemungkinan strategi untuk menemukan perkiraan yang baik (dan buruk).

kita akan mulai dengan dua derajat kebebasan, katakanlah satu variabel spasial x dan waktu t . diberi fungsi $u(x,t)$, turunan spasialnya ditemukan dari ekspansi taylor

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma[(\Delta x)^3]$$

orde perkiraan dapat dinaikkan ke orde kedua dengan mengambil selisih antara dua langkah waktu, yang mengurangi suku kuadrat :

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma[(\Delta x)^3]$$

Dalam penelitian ini melibatkan beberapa langkah sistematis untuk membangun model matematika dan menghasilkan prediksi yang akurat. Dan juga mengintegrasikan pendekatan teoritis, pengolahan data, dan simulasi numerik. Proses penelitian terdiri dari beberapa tahap, yang dijelaskan secara rinci sebagai berikut :

1) Analisis Data Topografi

Wilayah Medan memiliki topografi yang relatif datar, dengan ketinggian berkisar antara 2 hingga 37 meter di atas permukaan laut dan kemiringan lereng yang bervariasi. Dalam model kalkulus multivariable, gradien topografi (∇h) digunakan untuk menganalisis arah aliran air. Dengan topografi yang datar, gradien ketinggian cenderung kecil, sehingga air bergerak lambat dan cenderung menggenang pada wilayah dataran rendah. Variasi kemiringan lereng juga memengaruhi kecepatan aliran air, di mana lereng curam mempercepat aliran, sedangkan dataran mendukung akumulasi air.

Topografi dapat dimodelkan sebagai fungsi $h(x,y)$, di mana x dan y adalah koordinat geografis, dan turunan parsial $\frac{\partial h}{\partial x}$ serta $\frac{\partial h}{\partial y}$ akan menentukan arah aliran air.

2) Analisis Data Curah Hujan

Curah hujan di Medan rata-rata mencapai 2.200 mm per tahun, dengan musim hujan berlangsung dari September hingga Maret.

- Curah hujan ini menjadi sumber input utama dalam persamaan kontinuitas :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (hv) = R - E$$

- R : Curah hujan tinggi selama musim hujan meningkatkan R , sehingga $h(x,y,t)$, yaitu ketinggian air, akan naik.
- Penguapan (E) cenderung lebih rendah dibanding curah hujan selama periode hujan sehingga berkontribusi pada risiko banjir.

Curah hujan dapat dimodelkan sebagai fungsi waktu $R(t)$, yang mengikuti pola musiman. Analisis statistik menggunakan data historis dapat menentukan pola distribusi $R(t)$, seperti rata-rata curah hujan bulanan atau intensitas puncak.

3) Analisis Kapasitas Menyerap Air

Tanah di Medan sebagian besar terdiri dari tanah liat dan pasir, dengan kemampuan menyerap air yang dipengaruhi oleh kemiringan lereng dan jenis tanah. Tanah liat di wilayah medan juga memiliki kapasitas infiltrasi rendah sehingga air hujan cenderung lebih banyak mengalir di permukaan (runoff), memperbesar risiko genangan air. Sebaliknya, tanah pasir lebih menyerap air, tetapi kapasitasnya tergantung pada kemiringan lereng.

Kapasitas tanah menyerap air (C) dapat dimasukkan sebagai variabel dalam model hidrologi:

$$R_{efektif} = R - C$$

di mana $R_{efektif}$ adalah curah hujan yang berubah menjadi aliran permukaan setelah dikurangi oleh infiltrasi. Kapasitas tanah ($C(x,y)$) dapat dipetakan berdasarkan distribusi jenis tanah dan kemiringan topografi. Nilai C untuk tanah liat dan pasir perlu diukur untuk menentukan persentase air yang dapat diserap.

4) Analisis Sistem Drainase

Sistem drainase di Medan masih perlu ditingkatkan. Beberapa wilayah memiliki sistem yang tidak memadai untuk menampung air hujan. Drainase memengaruhi laju air yang keluar dari suatu area (Q). Jika kapasitas drainase rendah, Q kecil, dan air cenderung menggenang.

Dalam persamaan kontinuitas :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot q = R - E - Q$$

Nilai Q yang kecil akan menyebabkan kenaikan ketinggian air (h) lebih cepat selama periode hujan intens. Sistem drainase dapat dimodelkan sebagai parameter tambahan $Q(x,y)$, yang bervariasi tergantung pada efisiensi drainase di wilayah tersebut. Wilayah dengan drainase buruk akan memiliki nilai $Q(x,y)$ rendah.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada sebuah data suhu kota medan di website resmi bmkg, Tercatat pada bulan september suhu paling tinggi rata rata di 34 derajat celcius sedangkan paling rendah rata rata di 24 derajat celcius. Lalu pada bulan oktober suhu paling tinggi rata rata di 33 derajat celcius sedangkan paling rendah rata rata di 24 derajat celcius dan juga bulan november suhu paling tinggi rata rata di 34 derajat celcius sedangkan paling rendah rata rata di 24 derajat celcius. Dan data terakhir pada bulan desember suhu paling tinggi rata rata di 33 derajat celcius sedangkan paling rendah rata rata di 24 derajat celcius dengan musim yang dialami pada keempat bulan tersebut ialah musim hujan dan pada bulan desember kota medan mengalami banjir.

1. Analisis Data Suhu

Dari data suhu yang diberikan, kita dapat melihat pola suhu di Kota Medan selama bulan September hingga Desember:

- September: Suhu tertinggi 34°C, terendah 24°C
- Oktober: Suhu tertinggi 33°C, terendah 24°C
- November: Suhu tertinggi 34°C, terendah 24°C
- Desember: Suhu tertinggi 33°C, terendah 24°C

Dari data ini, kita dapat menghitung rata-rata suhu tertinggi dan terendah:

- Rata-rata suhu tertinggi : $\frac{33+33+34+33}{4} = 33.5^{\circ}C$
- Rata-rata suhu terendah : $\frac{24+24+24+24}{4} = 24^{\circ}C$

pola rata-rata suhu pada bulan September hingga Desember menunjukkan konsistensi:

- Suhu tertinggi rata-rata berkisar 33.5°C
- Suhu terendah rata-rata stabil di 24°C

Jika pola ini berlanjut ke bulan Januari, kita dapat memprediksi bahwa suhu rata-rata pada bulan Januari kemungkinan besar akan berada dalam kisaran yang sama, yaitu:

- Suhu tertinggi: 33–34°C.
- Suhu terendah: 24°C.

Untuk mendapatkan nilai prediksi yang lebih presisi, interpolasi linier dapat digunakan :

$$T_{Tinggi}(januari) \approx \frac{T_{tinggi, desember} + T_{tinggi, februari}}{2}$$

$$T_{Rendah}(januari) \approx \frac{T_{rendah, desember} + T_{rendah, februari}}{2}$$

2. Hubungan Suhu, Curah Hujan, dan Banjir

Berdasarkan data, bulan Desember memiliki suhu rata-rata yang mirip dengan bulan-bulan sebelumnya, tetapi terjadi banjir karena kombinasi faktor :

- Curah hujan tinggi selama musim hujan (September–Maret).
- Sistem drainase yang belum memadai.
- Topografi wilayah yang datar menyebabkan akumulasi air lebih cepat.

Untuk memprediksi apakah banjir akan terjadi di bulan Januari, kita gunakan kalkulus multivariable untuk mengevaluasi :

a) Curah Hujan (R) :

Model curah hujan $R(t)$ pada bulan Januari diduga tinggi, berdasarkan pola musim hujan sebelumnya.

b) Sistem Drainase (Q) :

Sistem drainase kemungkinan besar tetap tidak memadai, sehingga nilai Q kecil.

c) Aliran dan Akumulasi Air (h) :

Berdasarkan persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot q = R - E - Q$$

- R : Curah hujan tinggi meningkatkan akumulasi h
- E : Evapotranspirasi rendah pada musim hujan tidak cukup signifikan untuk mengurangi h
- Q : Drainase tidak optimal memperlambat aliran keluar

Jika nilai $h(x,y,t)$ terus meningkat hingga melebihi kapasitas penyerapan tanah, maka banjir kemungkinan besar terjadi.

3. Simulasi Prediksi Banjir

Untuk memodelkan potensi banjir pada bulan Januari maka akan melalui tahap perhitungan. Metode Penman-Monteith merupakan pendekatan empiris yang sering digunakan untuk menghitung evapotranspirasi (ET) dalam konteks siklus air, seperti prediksi banjir. Suhu tidak secara langsung memengaruhi model hidrologi, tetapi suhu dapat digunakan untuk menghitung evapotranspirasi (E) menggunakan persamaan empiris seperti Penman-Monteith :

Evapotranspirasi (ET) dihitung menggunakan formula :

$$ET = \frac{0.408 \Delta(R_n - G) + \frac{900}{T + 273} u_2 (e_s - e_a)}{\Delta + \gamma(1 + 0.34 u_2)}$$

Keterangan :

- ET : Evapotranspirasi (mm/hari)
- Δ : Kemiringan kurva tekanan uap (kPa/°C)
- R_n : Radiasi netto (MJ/m²/hari)
- G : Fluks panas tanah (MJ/m²/hari)
- γ : Konstanta psikrometrik (kPa/ C)
- T : Suhu rata-rata (C)
- u_2 : Kecepatan angin pada 2 m di atas permukaan tanah (m/s)
- e_s : Tekanan uap jenuh (kPa)
- e_a : Tekanan uap aktual (kPa)

Data yang Dimiliki

- Suhu rata-rata bulan Januari :
 - Suhu maksimum (T_{max}) : 33°C
 - Suhu minimum (T_{min}) : 24°C
 - Suhu rata-rata (T) : $\frac{T_{max} + T_{min}}{2} = \frac{33 + 24}{2} = 28.5^\circ\text{C}$
- Kelembaban relatif (RH) : 85%
- Kecepatan angin (u_2) : 1.6m/s
- Radiasi netto (R_n) : 10.8 MJ/m²/hari
- Fluks panas tanah (G) : 0 MJ/m²/hari
- Curah hujan bulan Januari : 270 mm

4. Langkah Perhitungan

- Tekanan Uap Jenuh (e_s)

Tekanan uap jenuh dihitung menggunakan rumus :

$$e_s = 0.6108 \cdot \exp \frac{17 \cdot T_{max}}{T_{max} + 237.3}$$

Substitusikan $T_{max} = 33^\circ\text{C}$

$$e_s = 0.6108 \cdot \exp \frac{17 \cdot 33}{33 + 237.3}$$

$$e_s = 0.6108 \cdot \exp \frac{570.91}{270.3} = 0.6108 \cdot \exp(2.112) = 5.05 \text{ kPa}$$

- Tekanan Uap Aktual (e_a)

Tekanan uap aktual dihitung dari kelembaban relatif (RH):

$$e_a = RH \cdot e_s / 100$$

Substitusi RH = 85% dan $e_s = 5.05 \text{ kPa}$:

$$e_a = \frac{85 \cdot 5.05}{100} = 4.29 \text{ kPa}$$

- Kemiringan Kurva Tekanan Uap (Δ)

Kemiringan kurva tekanan uap dihitung dengan rumus :

$$\Delta = \frac{4098 \cdot e_s}{(T + 237.3)^2}$$

Substitusi $e_s = 5.05$ dan $T = 28.5^\circ\text{C}$

$$\Delta = \frac{4098 \cdot 5.05}{(28.5 + 237.3)^2} = \frac{20696.9}{265.8^2} = 0.293 \text{ kPa}/^\circ\text{C}$$

- Evapotranspirasi (ET)

Evapotranspirasi dihitung menggunakan persamaan Penman-Monteith :

$$ET = \frac{0.408 \Delta (R_n - G) + y \frac{900}{T + 273} u_2 (e_s - e_a)}{\Delta + y(1 + 0.34 u_2)}$$

Konstanta psikrometrik (y) untuk kondisi ini adalah :

$$y = 0.066 \text{ kPa}/^\circ\text{C}$$

Substitusi nilai:

- $\Delta = 0.293 \text{ kPa}/^\circ\text{C}$
- $R_n = 10.8 \text{ MJ}/\text{m}^2 / \text{hari}$
- $G = 0$
- $T = 28.5^\circ\text{C}$
- $u_2 = 1.6 \text{ m}/\text{s}$
- $e_s = 5.05 \text{ kPa}$
- $e_a = 4.29 \text{ kPa}$

$$ET = \frac{0.408 \cdot 0.293(10.8 - 0) + 0.066 \cdot \frac{900}{28.5 + 273} 1.6(5.05 - 4.29)}{0.293 + 0.066(1 + 0.34 \cdot 1.6)}$$

$$ET = \frac{1.529}{0.395} = 3.87 \text{ mm}/\text{hari}$$

5. Prediksi tinggi Air Bulan Januari

- Curah hujan bulan Januari : 270mm
- Jumlah hari : 31
- Evapotranspirasi total bulan Januari : $ET \times 31 = 3.87 \times 31 = 120 \text{ mm}$
- Tinggi air : $H = \text{Curah Hujan} - \text{Evapotranspirasi Total} = 270 - 120 = 150$

Melalui hasil akhir pada bagian kelima, Dapat disimpulkan bahwa ketinggian air pada bulan januari 2025 pada kota medan ialah 150mm. Dengan ketinggian tersebut kota medan berpotensi mengalami banjir pada bulan januari.

KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil menunjukkan bahwa kalkulus multivariable merupakan alat yang sangat efektif dalam memodelkan fenomena alam, khususnya untuk memprediksi potensi banjir di Kota Medan. Dengan memanfaatkan data topografi, curah hujan, kapasitas penyerapan air tanah, dan sistem drainase, model matematis berbasis kalkulus multivariable mampu memberikan prediksi yang lebih akurat mengenai kapan dan di mana banjir kemungkinan terjadi.

Hasil simulasi dan analisis menunjukkan bahwa kondisi topografi yang datar, curah hujan tinggi, dan sistem drainase yang tidak memadai adalah faktor utama yang meningkatkan risiko banjir. Selain itu, penggunaan metode seperti persamaan kontinuitas dan Penman-Monteith untuk menghitung evapotranspirasi memberikan hasil yang mendekati realitas.

Penelitian ini tidak hanya mendukung mitigasi bencana banjir, tetapi juga membuka peluang untuk pengembangan model prediksi yang lebih kompleks dengan memasukkan variabel tambahan seperti perubahan iklim dan pola urbanisasi. Studi lanjutan dapat mengintegrasikan teknologi pemetaan modern seperti GIS untuk meningkatkan resolusi dan akurasi model.

Sebagai rekomendasi, penelitian lebih lanjut sebaiknya fokus pada peningkatan sistem drainase di daerah rawan banjir, pengelolaan penggunaan lahan yang lebih bijak, serta integrasi data real-time untuk memberikan prediksi yang lebih responsif dan adaptif terhadap perubahan kondisi lingkungan.

DAFTAR PUSTAKA

- Purnomo, E. A. (2017). Implementasi Lesson Study Untuk Meningkatkan Kualitas Pembelajaran Pada Matakuliah Kalkulus Multivariabel. *Jurnal Unimus* , 11-17.
- Appendix. (2024). MATHEMATICAL MODELLING.
- Banerjee, S. (2022). Mathematical Modeling Models, Analysis and Applications.
- Marion, G. (2008). Mathematical Modelling
- Gershenfeld, N. (2011). The Nature of Mathematical Modelling
- Andriani, P. (2020). KALKULUS PEUBAH BANYAK